Графики на функции и повърхнини

Николай Икономов

10 декември 2011 г.

Съдържание

1 Функции **3**
1.1 Тригонометрични функции . . . 3
1.2 Обратни тригонометрични функции . . . 6
1.3 Хиперболични функции . . . 9
1.4 Обратни хиперболични функции . . . 12
1.5 Още графики на функции . . . 15
1.6 Производни на функции . . . 16
1.7 Анализиране на функции . . . 18

2 Криви линии от втора степен **19**
2.1 Елипса . . . 19
2.2 Хипербола . . . 20
2.3 Парабола . . . 22

3 Повърхнини от втора степен **24**
3.1 Елипсоидни повърхнини . . . 24
3.2 Хиперболоидни повърхнини . . . 25
3.3 Параболоидни повърхнини . . . 26
3.4 Цилиндрични повърхнини . . . 27
3.5 Равнини . . . 29

4 Координатни системи **30**
4.1 Полярни координати . . . 30
4.2 Цилиндрични координати . . . 30
4.3 Сферични координати . . . 31

5 Вектори **33**
5.1 Скаларно произведение . . . 33
5.2 Векторно произведение . . . 33
5.3 Смесено произведение . . . 33

Литература **34**

За контакти: nike32@abv.bg, justmathbg.info.

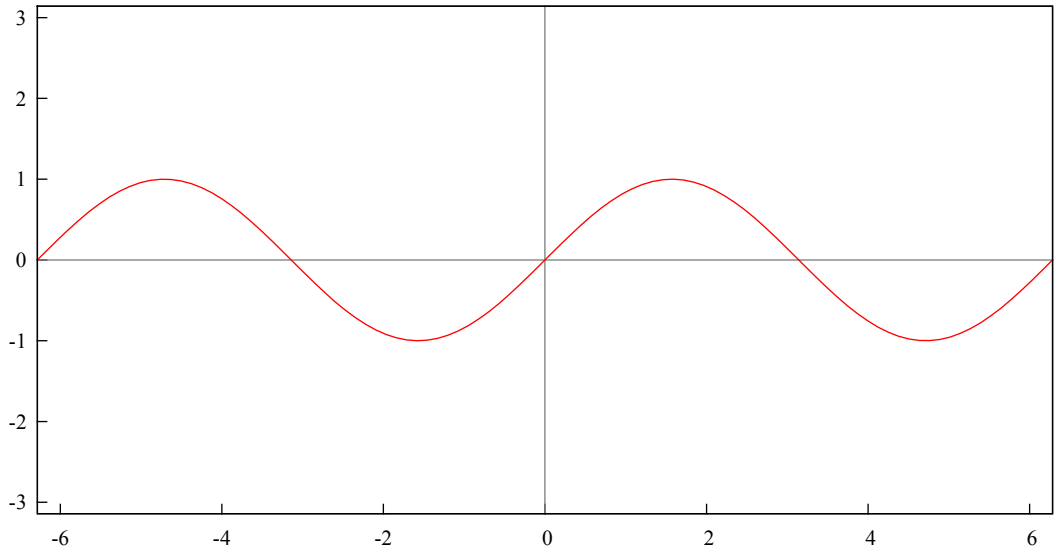
1 Функции

1.1 Тригонометрични функции

Тригонометрични функции (Trigonometric functions).

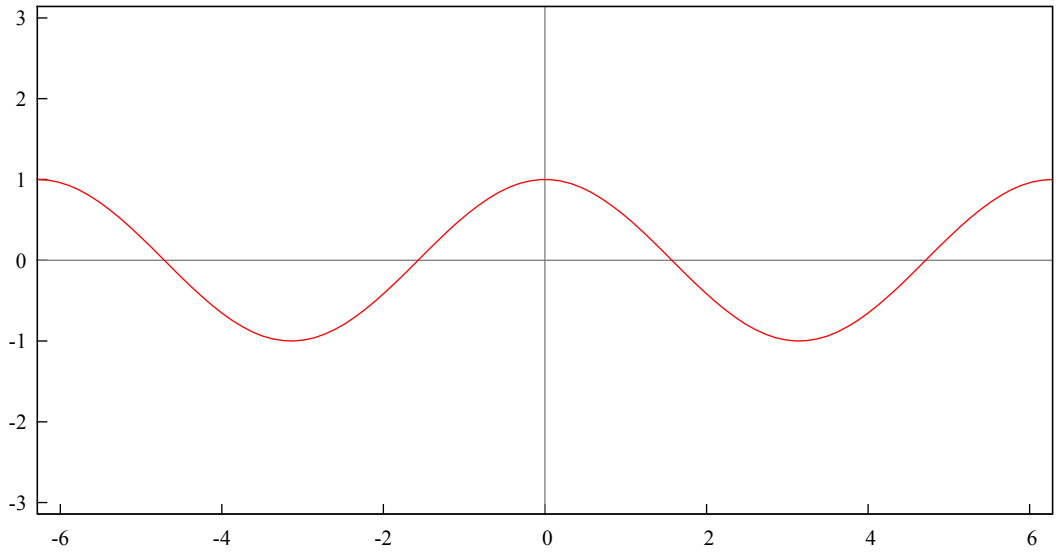
- Синус (Sine)

$$\sin(x),\ x \in (-\infty, \infty),\ y \in [-1, 1]$$



- Косинус (Cosine)

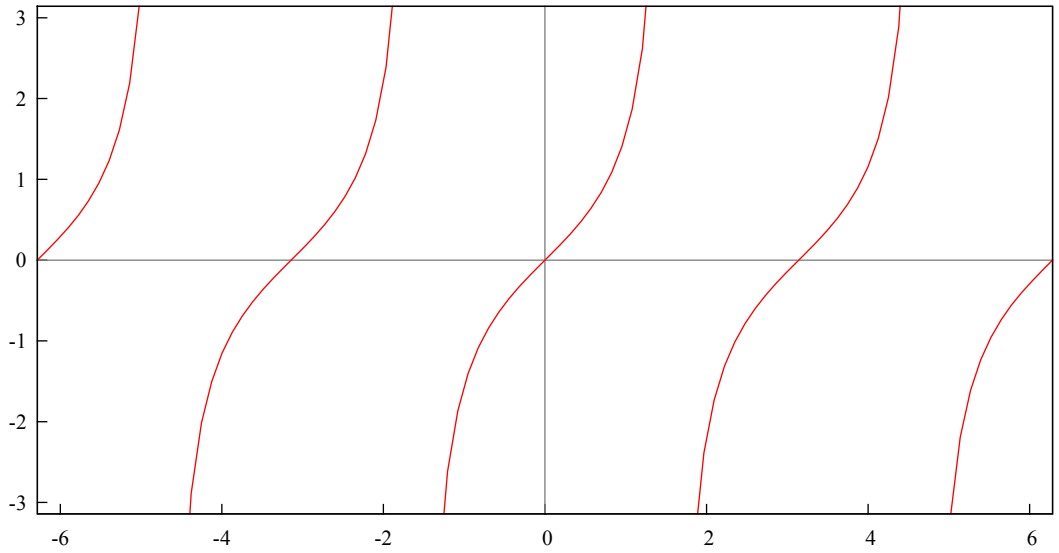
$$\cos(x),\ x \in (-\infty, \infty),\ y \in [-1, 1]$$



- Тангенс (Tangent)

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)},\ x \in (-\pi/2, \pi/2),\ y \in (-\infty, \infty)$$

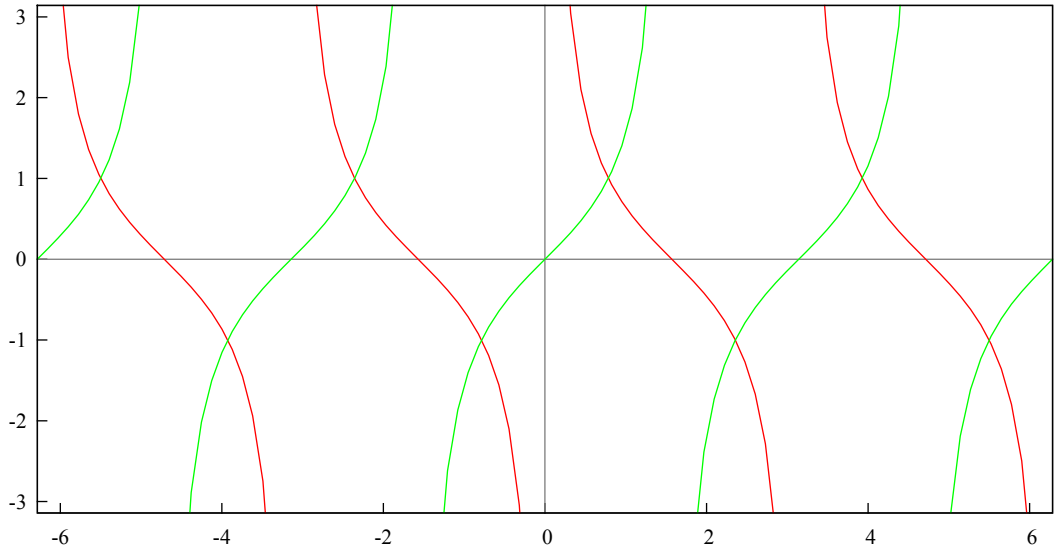
$$x \in (k\pi/2, (k+2)\pi/2),\ y \in (-\infty, \infty),\ k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots$$



- Котангенс (зелено: тангенс) (Cotangent)

$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)},\ x \in (0, \pi),\ y \in (-\infty, \infty)$$

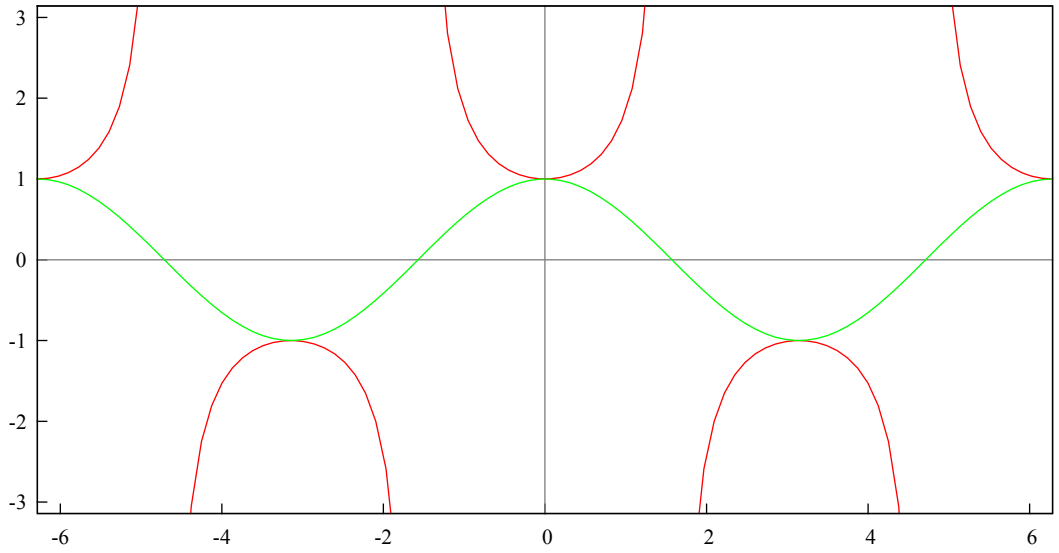
$$x \in (k\pi, (k+1)\pi),\ y \in (-\infty, \infty),\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$



- Секант (зелено: косинус) (Secant)

$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)},\ x \in (-\pi/2, \pi/2),\ y \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$$

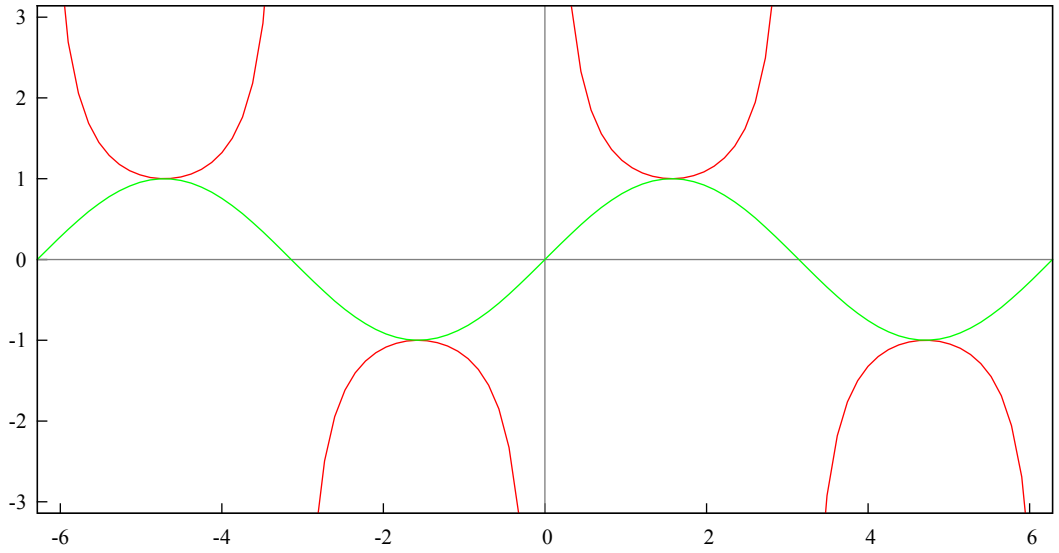
$$x \in (k\pi/2, (k+2)\pi/2),\ y \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty),\ k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots$$



- Косекант (зелено: синус) (Cosecant)

$$\csc(x) = \frac{1}{\sin(x)},\ x \in (0, \pi),\ y \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$$

$$x \in (k\pi, (k+1)\pi),\ y \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty),\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$



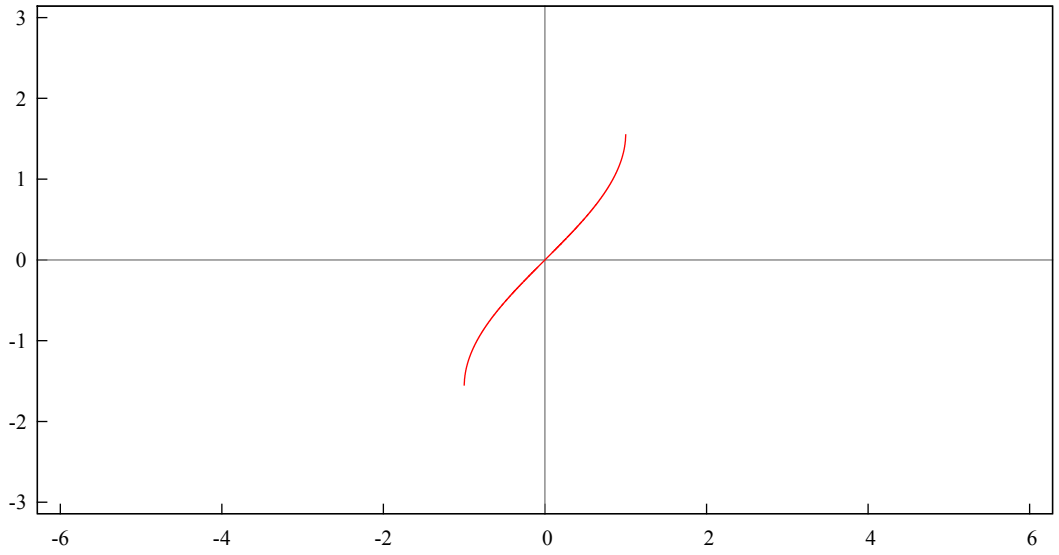
1.2 Обратни тригонометрични функции

Обратни тригонометрични функции (Inverse trigonometric functions). Arc е за дъга (Arc stands for arcus).

- Аркус синус (Inverse sine)

$$\arcsin(x),\ x \in [-1,1],\ y \in [-\pi/2, \pi/2]$$

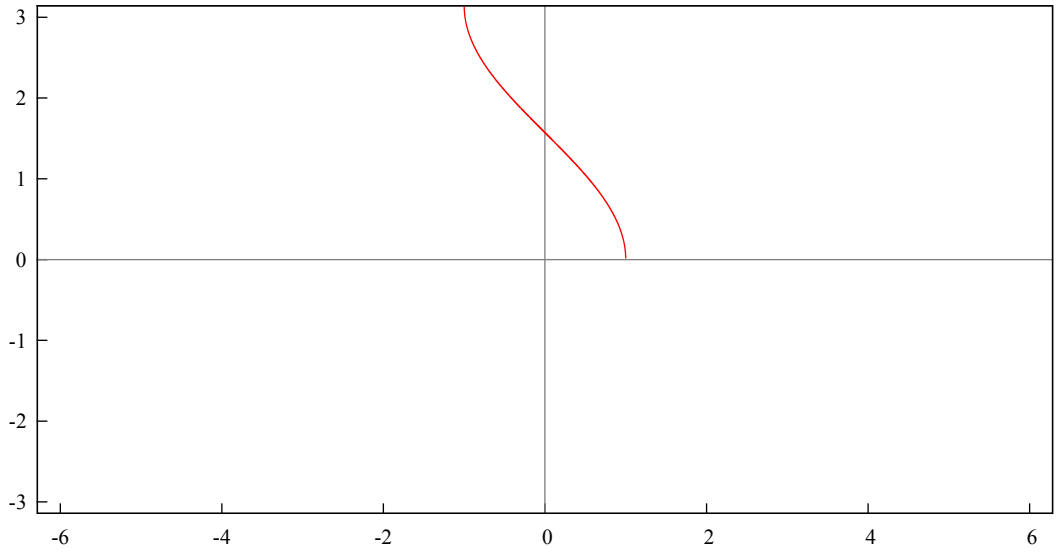
$$x \in [-1,1],\ y \in [k\pi/2, (k+2)\pi/2],\ k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots$$



- Аркус косинус (Inverse cosine)

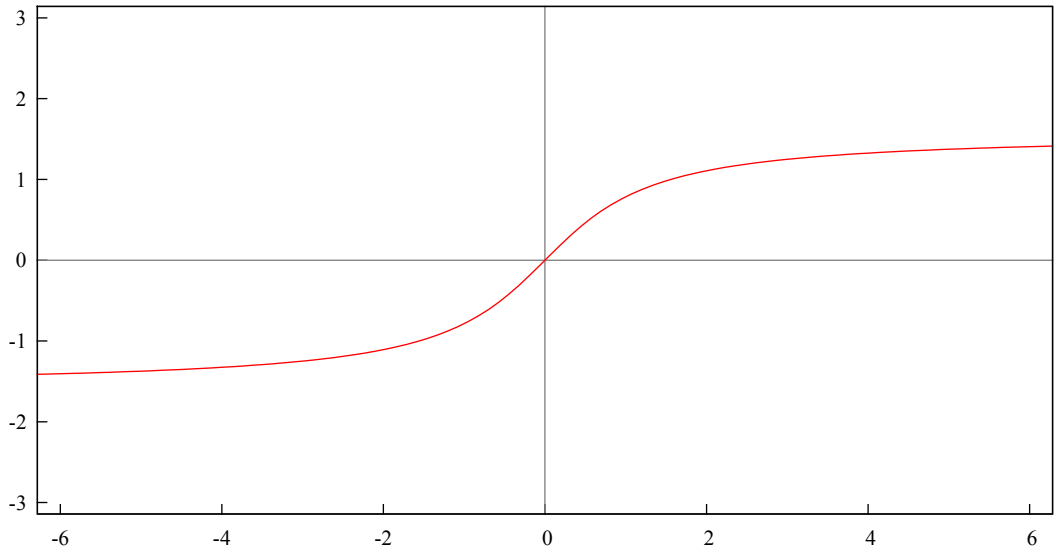
$$\arccos(x),\ x \in [-1,1],\ y \in [0, \pi]$$

$$x \in [-1,1],\ y \in [k\pi, (k+1)\pi],\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$



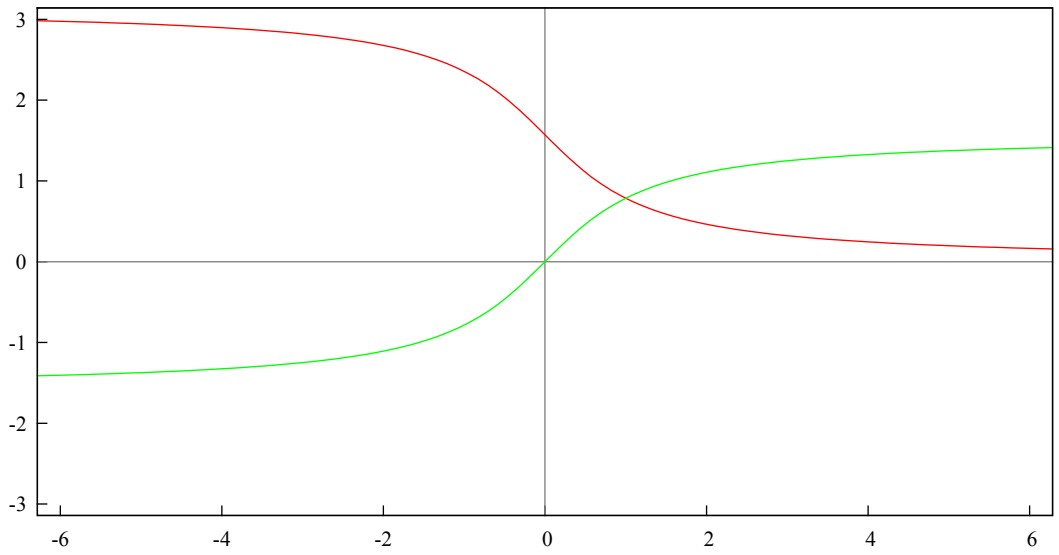
- Аркус тангенс (Inverse tangent)

$$\arctan(x),\ x \in (-\infty, \infty),\ y \in (-\pi/2, \pi/2)$$



- Аркус котангенс (зелено: аркус тангенс) (Inverse cotangent)

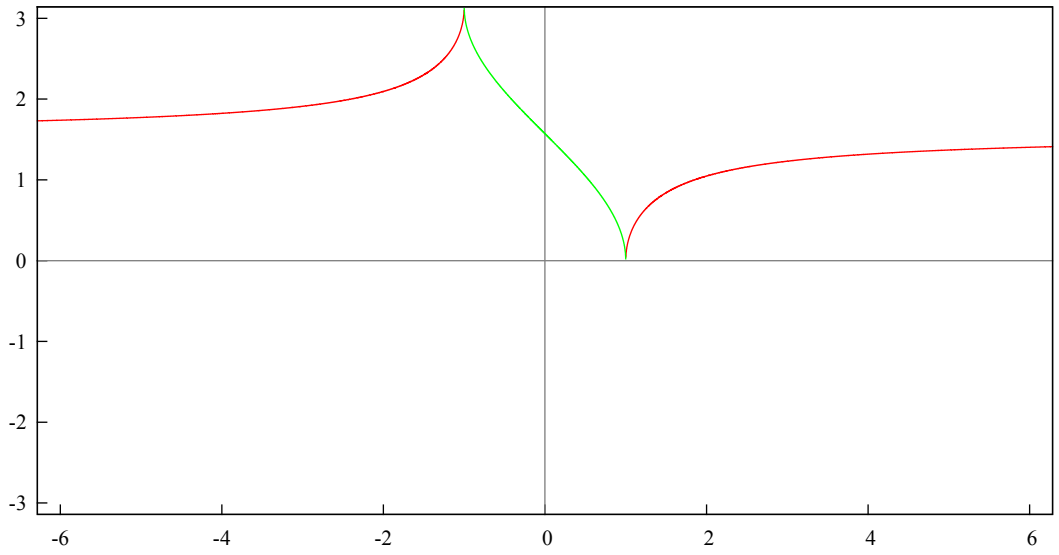
$$\operatorname{arccot}(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x),\ x \in (-\infty, \infty),\ y \in (0, \pi)$$



- Аркус секант (зелено: аркус косинус) (Inverse secant)

$$\operatorname{arcsec}(x) = \arccos(x^{-1}) = \arccos(1/x)$$

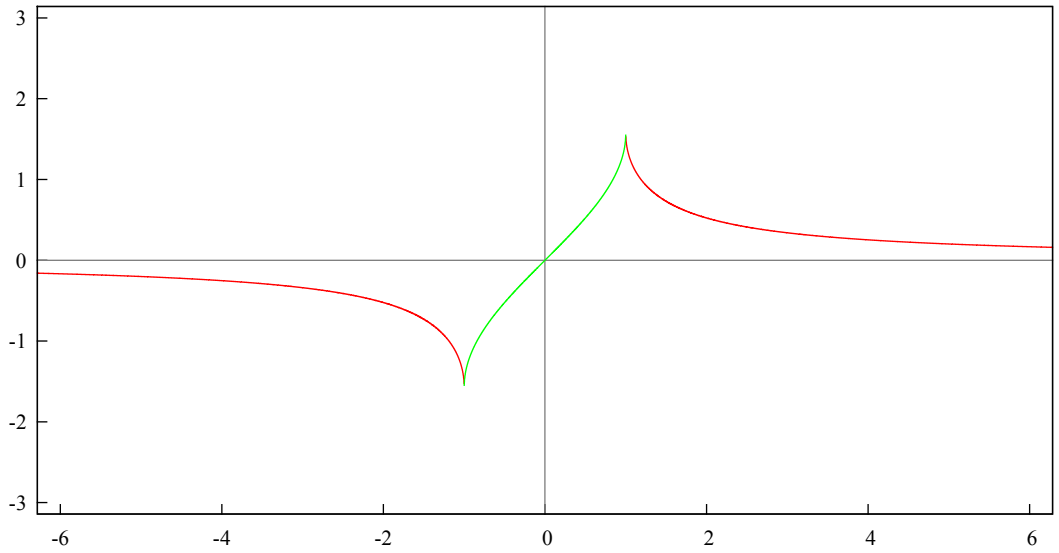
$$x \in (-\infty, -1],\ y \in (\pi/2, \pi]\ \cup\ x \in [1, \infty),\ y \in [0, \pi/2)$$



- Аркус косекант (зелено: аркус синус) (Inverse cosecant)

$$\operatorname{arccsc}(x) = \arcsin(x^{-1}) = \arcsin(1/x)$$

$$x \in (-\infty, -1],\ y \in [-\pi/2, 0)\ \cup\ x \in [1, \infty),\ y \in (0, \pi/2]$$

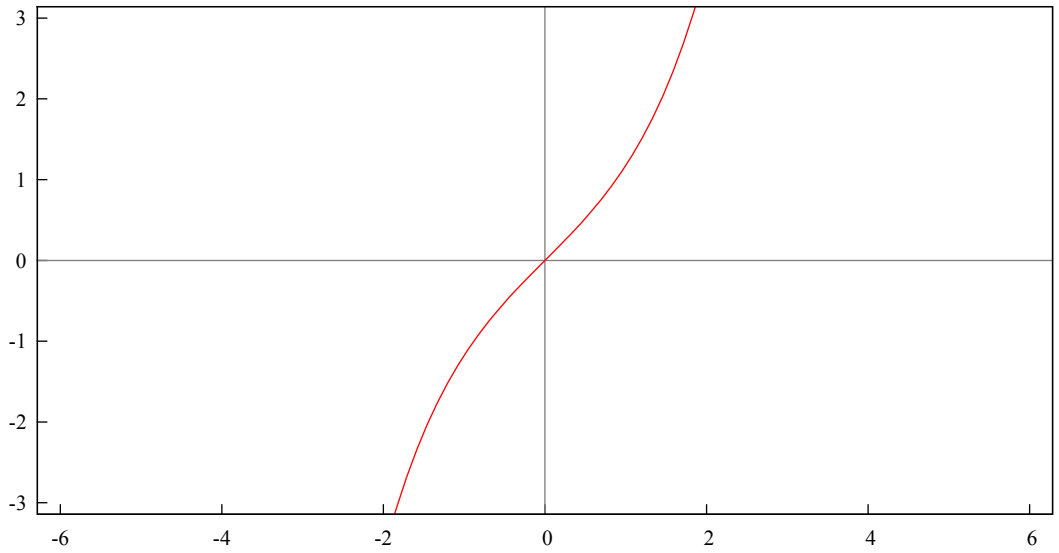


1.3 Хиперболични функции

Хиперболични функции (Hyperbolic functions).

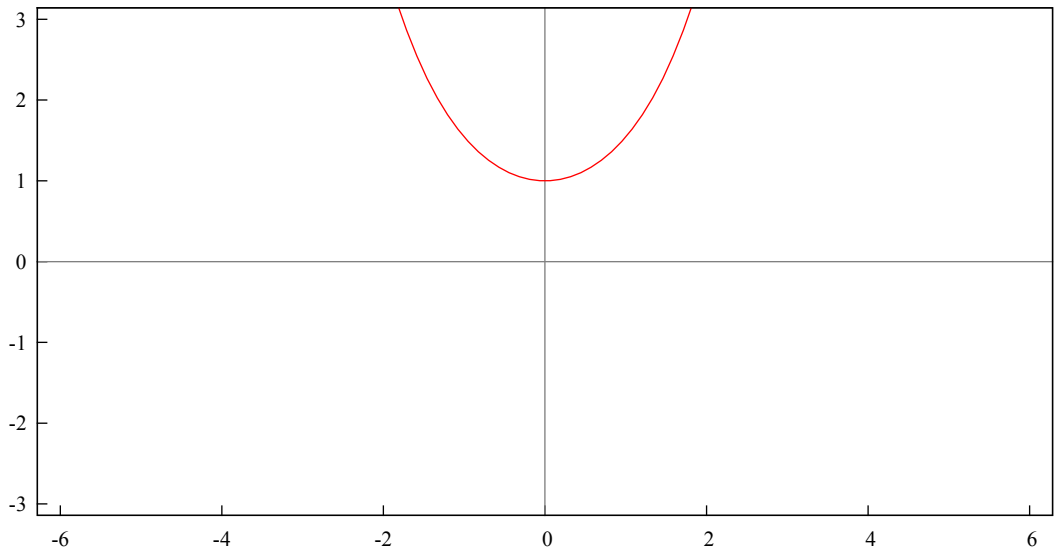
- Хиперболичен синус (Hyperbolic sine)

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ x \in (-\infty, \infty),\ y \in (-\infty, \infty)$$



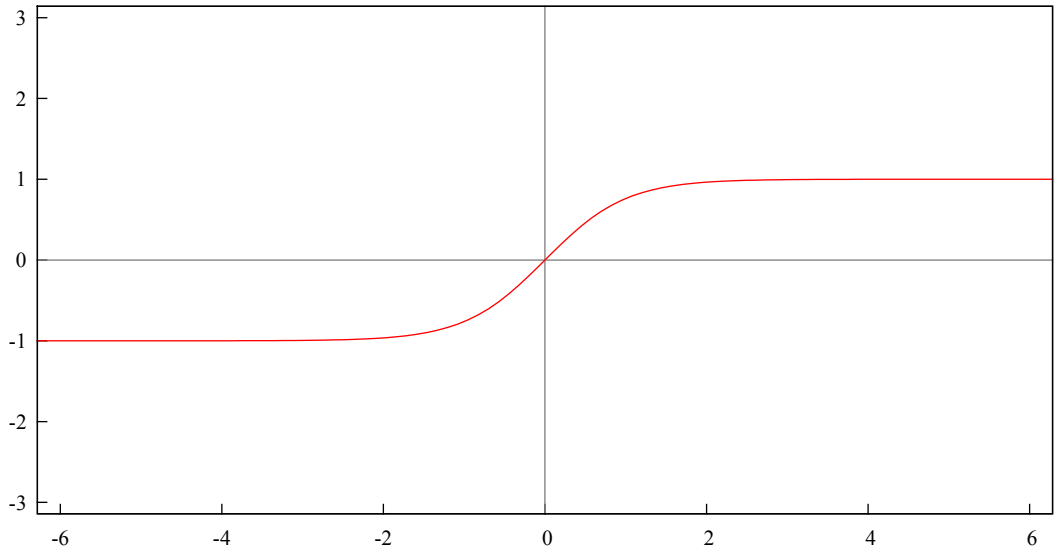
- Хиперболичен косинус (Hyperbolic cosine)

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ x \in (-\infty, \infty),\ y \in [1, \infty)$$



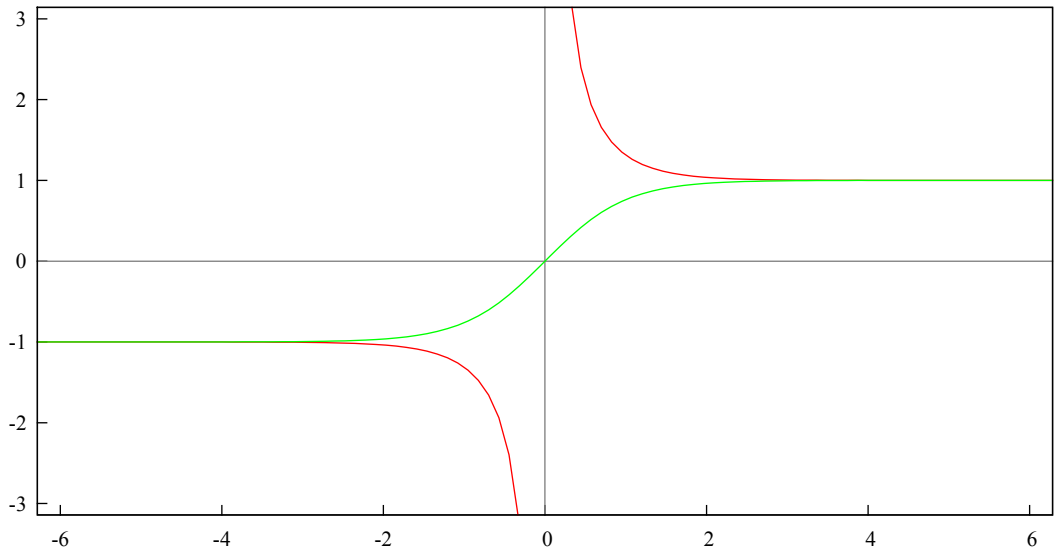
- Хиперболичен тангенс (Hyperbolic tangent)

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1},\ x \in (-\infty, \infty),\ y \in (-1, 1)$$



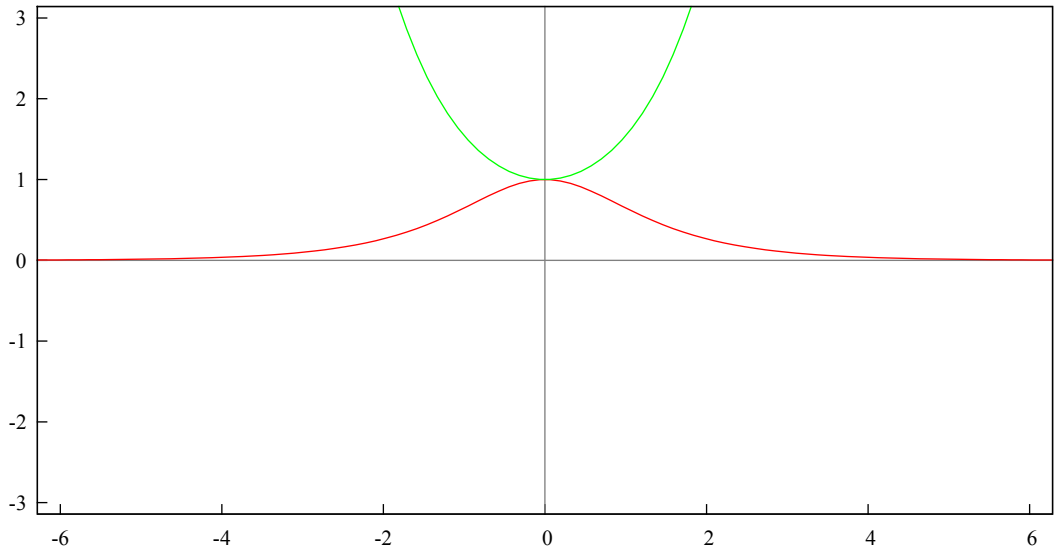
- Хиперболичен котангенс (зелено: tanh) (Hyperbolic cotangent)

$$\coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}},\ x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty),\ y \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$$



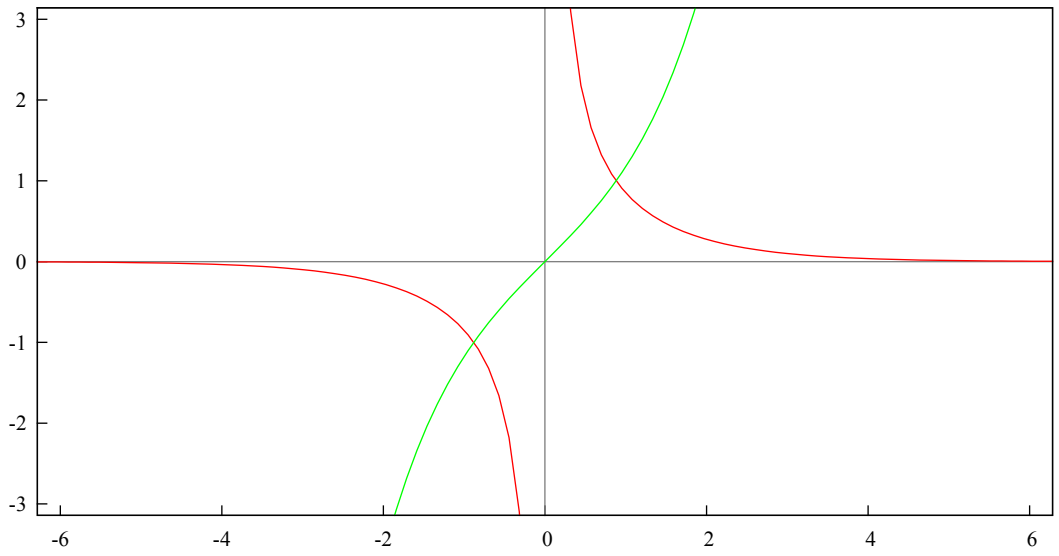
- Хиперболичен секант (зелено: cosh) (Hyperbolic secant)

$$\operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)} = \frac{2}{e^x + e^{-x}},\ x \in (-\infty, \infty),\ y \in (0, 1]$$



- Хиперболичен косекант (зелено: sinh) (Hyperbolic cosecant)

$$\operatorname{csch}(x) = \frac{1}{\sinh(x)} = \frac{2}{e^x - e^{-x}},\ x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty),\ y \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$

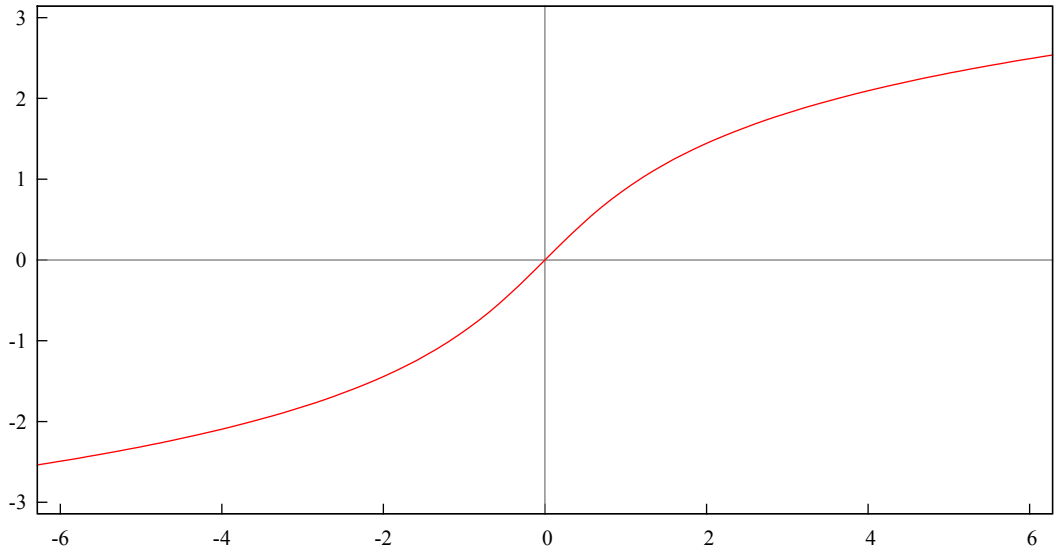


1.4 Обратни хиперболични функции

Обратни (областни) хиперболични функции (Inverse (area) hyperbolic functions). Ar е за област (Ar stands for area).

- Област хиперболичен синус (Inverse hyperbolic sine)

$$\operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}),\ x \in (-\infty, \infty),\ y \in (-\infty, \infty)$$



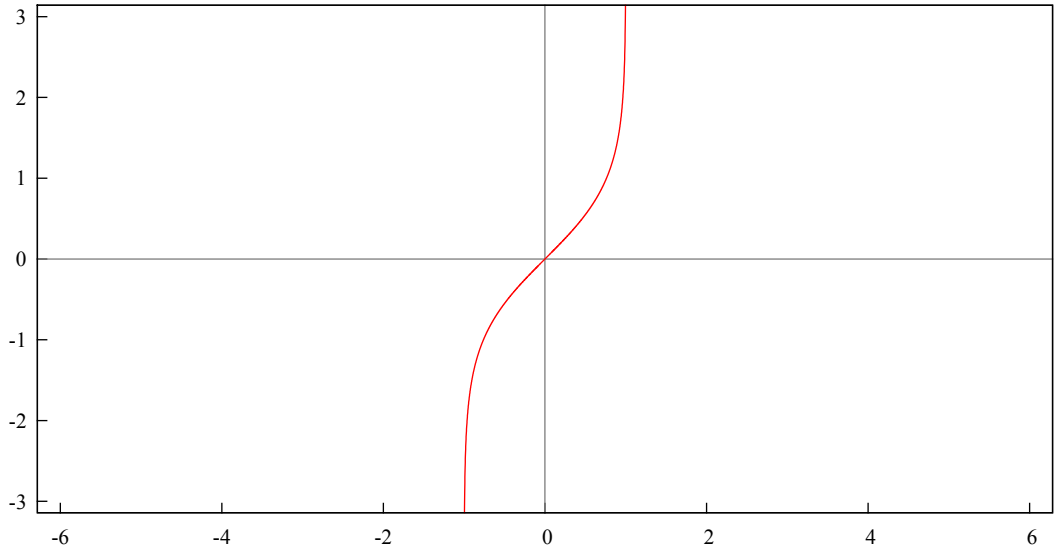
- Област хиперболичен косинус (I квадрант: знак +, IV квадрант: знак −) (Inverse hyperbolic cosine)

$$\operatorname{arcosh}(x) = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1}),\ x \in [1, \infty),\ y \in (-\infty, \infty)$$



- Област хиперболичен тангенс (Inverse hyperbolic tangent)

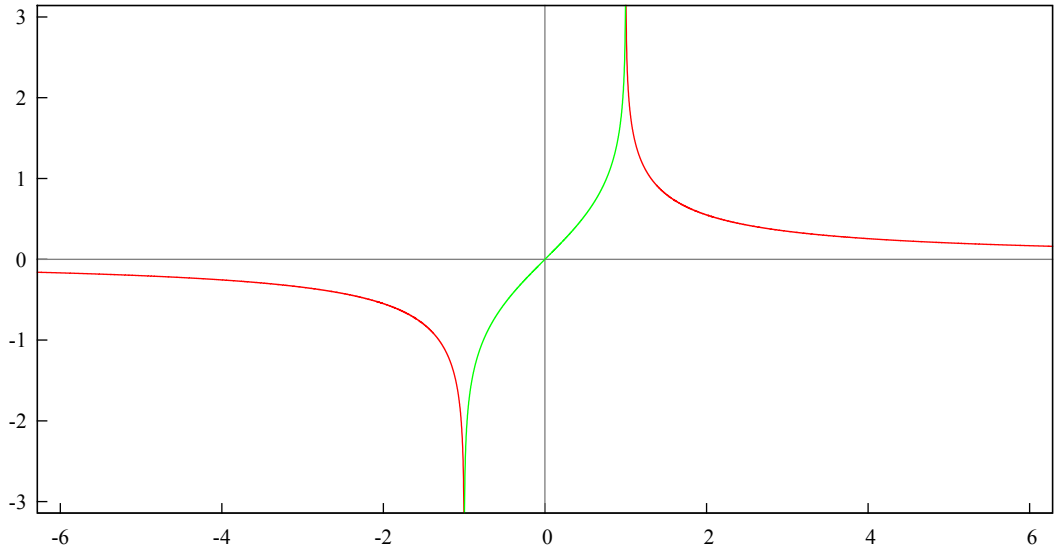
$$\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},\ x \in (-1,1),\ y \in (-\infty,\infty)$$



- Област хиперболичен котангенс (зелено: artanh) (Inverse hyperbolic cotangent)

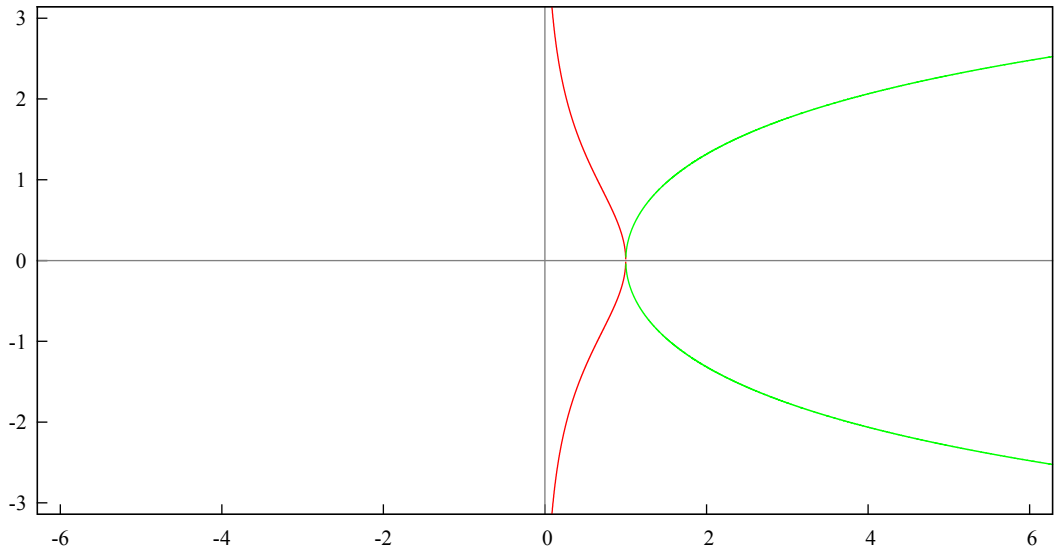
$$\operatorname{arcoth}(x) = \operatorname{artanh}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$$

$$x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty),\ y \in (-\infty,0) \cup (0,\infty)$$



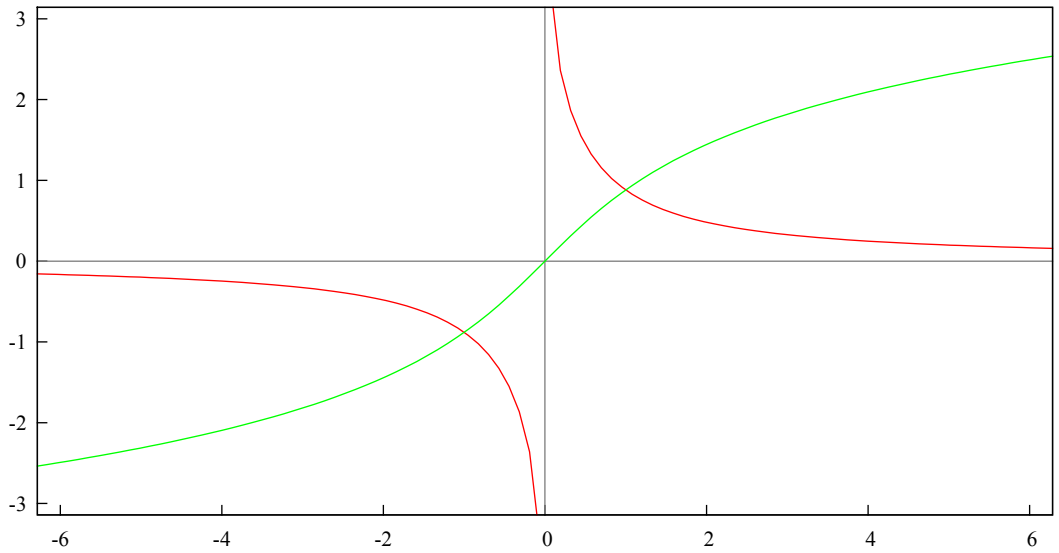
- Област хиперболичен секант (I квадрант: знак +, IV квадрант: знак −) (зелено: arcosh) (Inverse hyperbolic secant)

$$\operatorname{arsech}(x) = \operatorname{arcosh}\left(\frac{1}{x}\right) = \ln\frac{1 \pm \sqrt{1-x^2}}{x},\ x \in (0,1],\ y \in (-\infty,\infty)$$



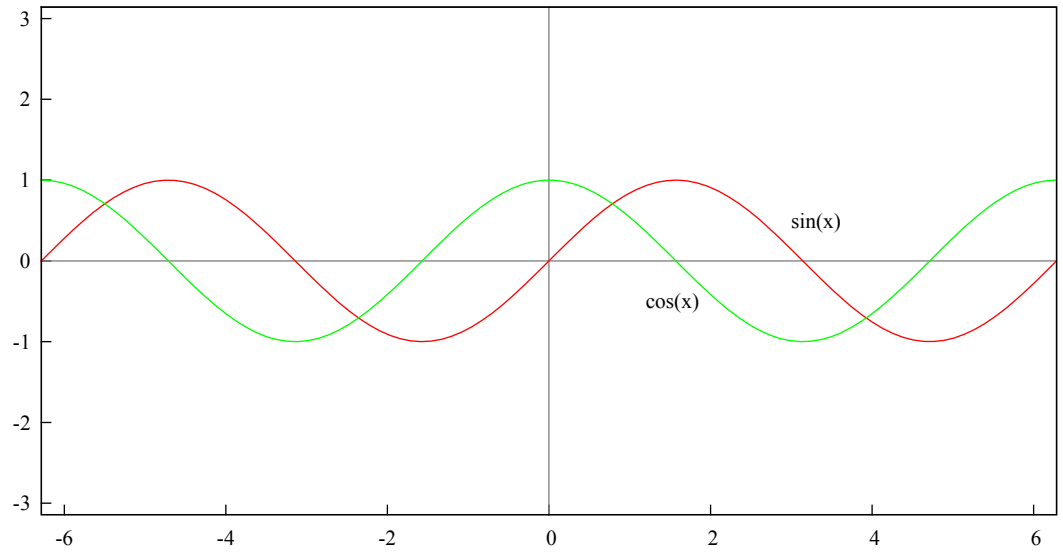
- Област хиперболичен косекант (I квадрант: знак +, III квадрант: знак −) (зелено: arsinh) (Inverse hyperbolic cosecant)

$$\operatorname{arcsch}(x) = \operatorname{arsinh}\left(\frac{1}{x}\right) = \ln\frac{1 \pm \sqrt{1+x^2}}{x},\ x \neq 0,\ y \neq 0$$

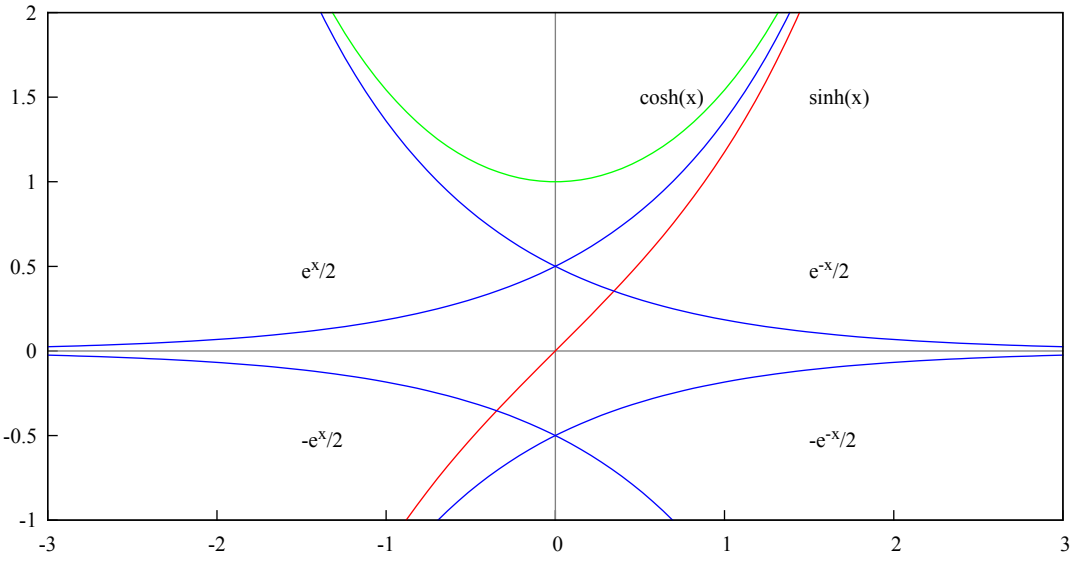


1.5 Още графики на функции

- Синус и косинус



- Хиперболичен синус и косинус



- Показателна функция

$$y = a^x,\ x \in (-\infty, \infty),\ y \in (0, \infty),\ a > 0,\ a \neq 1$$

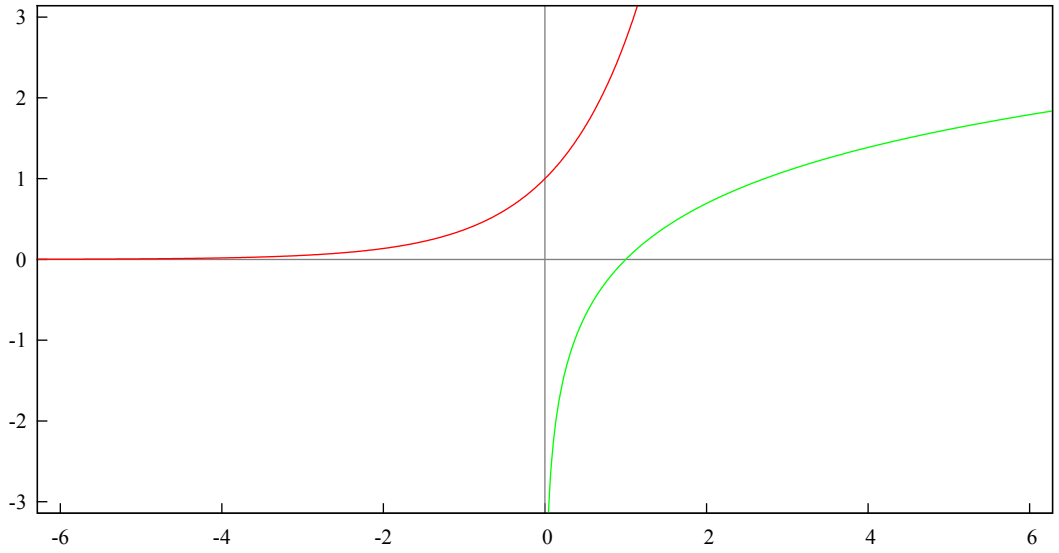
- Експоненциална функция (Exponential function)

$$y = e^x,\ x \in (-\infty, \infty),\ y \in (0, \infty)$$

Основни свойства:

$$e^{\ln(x)} = x,\ e^{x+y} = e^x \cdot e^y$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2.7(1828),\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \exp(x) = e^x$$



- Логаритмична функция (Logarithmic function)

$$y = \log_a(x),\ x \in (0,\infty),\ y \in (-\infty,\infty),\ a > 0,\ a \neq 1$$

- Натурален логаритъм (Natural logarithm)

$$y = \ln(x),\ x \in (0,\infty),\ y \in (-\infty,\infty)$$

$$\ln(e^x) = x,\ \ln(x) + \ln(y) = \ln(xy),\ \ln(x) - \ln(y) = \ln\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\ln(x) - \ln(y) = \ln(x) + (-1)\ln(y) = \ln(x) + \ln(y^{-1}) = \ln(xy^{-1}) = \ln\left(\frac{x}{y}\right)$$

1.6 Производни на функции

Формула за намиране на производни:

$$x' = \frac{1}{y'} \iff y' = \frac{1}{x'}$$

Логаритъм:

$$y = \ln(x) \iff x = e^y\ (= f^{-1}(y))$$

$$(e^y)' = \frac{1}{(\ln(x))'} = \frac{1}{1/x} = x = e^y$$

Аркус тангенс:

$$y = \arctan(x) \iff x = \tan(y)$$

$$(\arctan(x))' = \frac{1}{(\tan(y))'} = \frac{1}{1/\cos^2(y)} = \cos^2(y) = \frac{1}{1+\tan^2(y)} = \frac{1}{1+x^2}$$

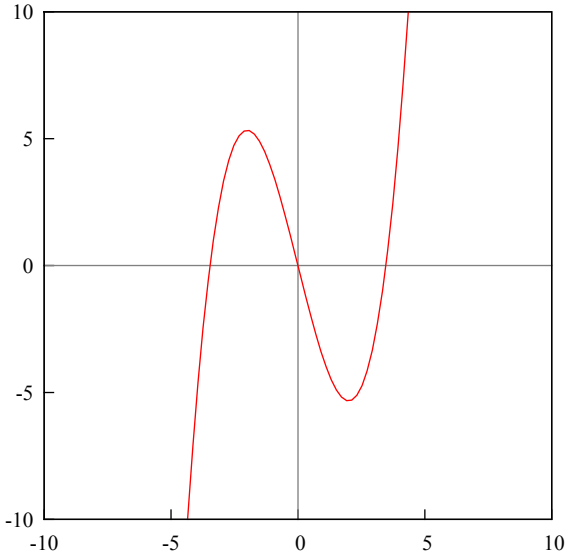
Списък на производните:

- $(\sin(x))' = \cos(x), \quad (\cos(x))' = -\sin(x),$
- $(\tan(x))' = \dfrac{1}{\cos^2(x)}, \quad (\cot(x))' = -\dfrac{1}{\sin^2(x)},$
- $(\sec(x))' = \sec(x)\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos^2(x)}, \quad (\csc(x))' = -\csc(x)\cot(x) = -\dfrac{\cos(x)}{\sin^2(x)},$
- $(\arcsin(x))' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arccos(x))' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},$
- $(\arctan(x))' = \dfrac{1}{1+x^2}, \quad (\operatorname{arccot}(x))' = -\dfrac{1}{1+x^2},$
- $(\operatorname{arcsec}(x))' = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, \quad (\operatorname{arccsc}(x))' = -\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}},$
- $(\sinh(x))' = \cosh(x), \quad (\cosh(x))' = \sinh(x),$
- $(\tanh(x))' = \dfrac{1}{\cosh^2(x)}, \quad (\coth(x))' = -\dfrac{1}{\sinh^2(x)},$
- $(\operatorname{sech}(x))' = -\operatorname{sech}(x)\tanh(x), \quad (\operatorname{csch}(x))' = -\operatorname{csch}(x)\coth(x),$
- $(\operatorname{arsinh}(x))' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \quad (\operatorname{arcosh}(x))' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}},$
- $(\operatorname{artanh}(x))' = \dfrac{1}{1-x^2}, \quad (\operatorname{arcoth}(x))' = \dfrac{1}{1-x^2},$
- $(\operatorname{arsech}(x))' = -\dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}, \quad (\operatorname{arcsch}(x))' = -\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^2}},$
- $(a^x)' = a^x \ln(a), \quad (e^x)' = e^x,$
- $(\log_a(x))' = \dfrac{1}{x\ln(a)}, \quad (\ln(x))' = \dfrac{1}{x},$
- $(x^n)' = nx^{n-1}, \quad (Cx)' = C, \quad C' = 0.$

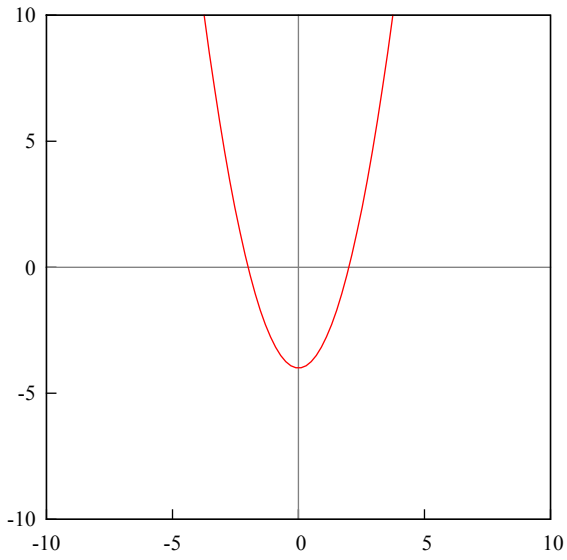
1.7 Анализиране на функции

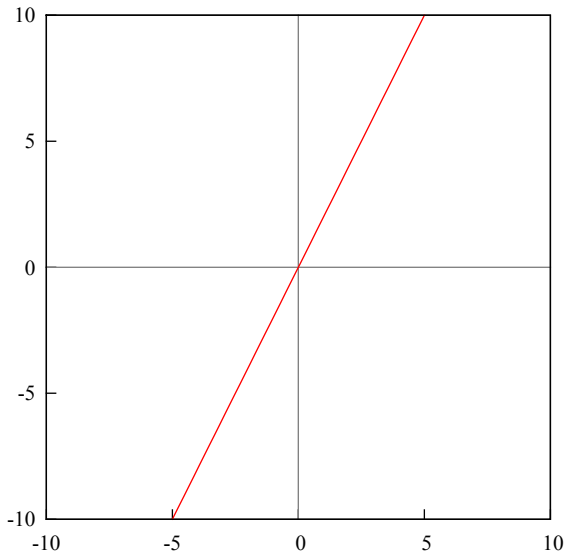
Нека да имаме следната функция:

$$y = \frac{x^3}{3} - 4x$$



Първата производна е $x^2 - 4$, корените са -2 и 2. Знакът около -2 е положителен вляво, отрицателен вдясно — максимум. Знакът около 2 е отрицателен вляво, положителен вдясно — минимум. При положителен знак на първата производна функцията расте, при отрицателен знак — намалява.





Втора производна $2x$, корен в нулата. Знакът около нулата е отрицателен вляво, положителен вдясно — инфлексна точка в нулата. При положителен знак на втората производна функцията е изпъкнала, при отрицателен — вдлъбната (вдлъбнатост/изпъкналост спрямо допирателната към функцията).

2 Криви линии от втора степен

Параметризиране на криви линии от втора степен, както и техните графики.

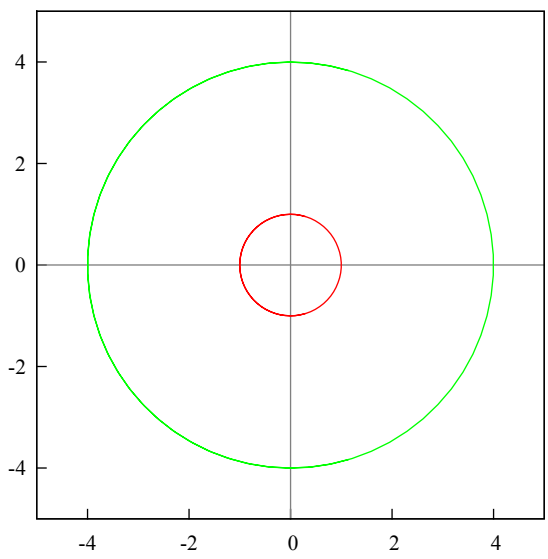
2.1 Елипса

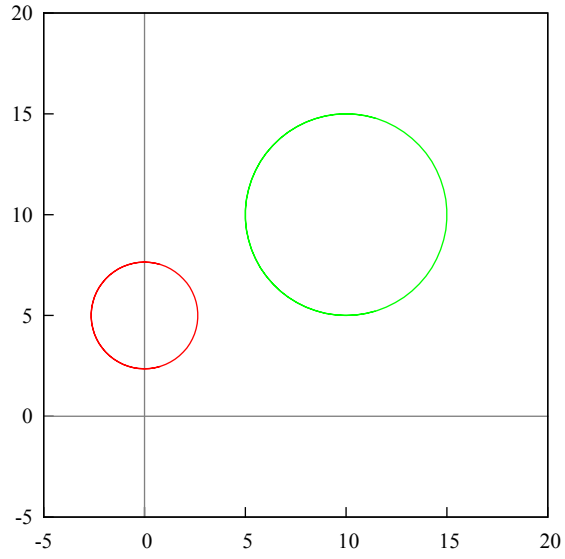
$$x^2 + y^2 = 1 \Longrightarrow x = \cos(t),\ y = \sin(t)$$

$$x^2 + y^2 = 16 \Longleftrightarrow \frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1 \Longrightarrow x = 4\cos(t),\ y = 4\sin(t)$$

$$\frac{x^2}{7} + \frac{(y-5)^2}{7} = 1 \Longrightarrow x = \sqrt{7}\,\cos(t),\ y = \sqrt{7}\,\sin(t) + 5$$

$$\frac{(x-10)^2}{25} + \frac{(y-10)^2}{25} = 1 \Longrightarrow x = 5\cos(t) + 10,\ y = 5\sin(t) + 10$$



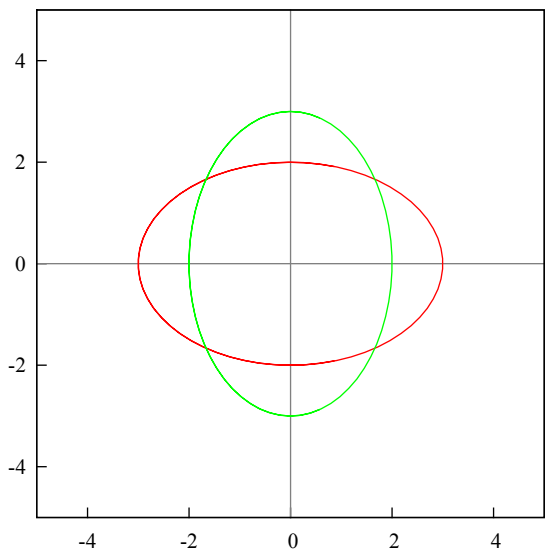


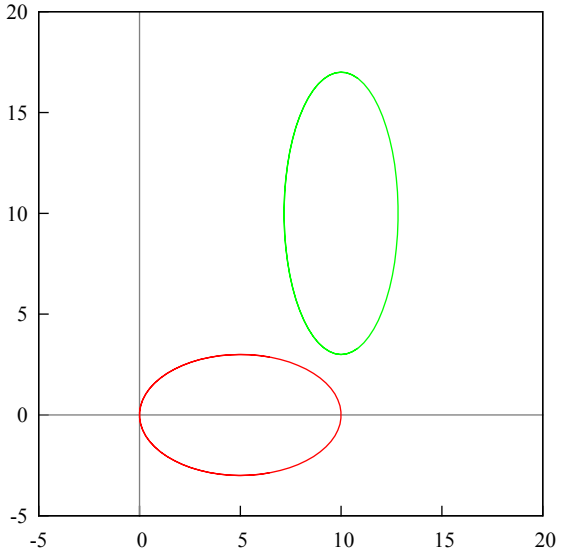
$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \Longrightarrow x = 3\cos(t),\ y = 2\sin(t)$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \Longrightarrow x = 2\cos(t),\ y = 3\sin(t)$$

$$\frac{(x-5)^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \Longrightarrow x = 5\cos(t) + 5,\ y = 3\sin(t)$$

$$\frac{(x-10)^2}{8} + \frac{(y-10)^2}{49} = 1 \Longrightarrow x = \sqrt{8}\,\cos(t) + 10,\ y = 7\sin(t) + 10$$





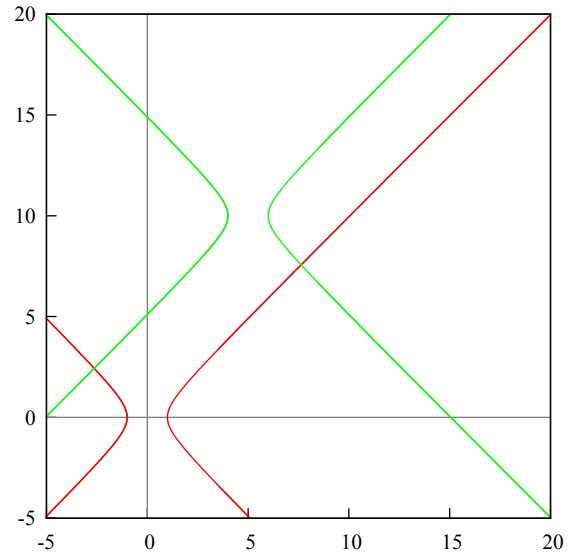
2.2 Хипербола

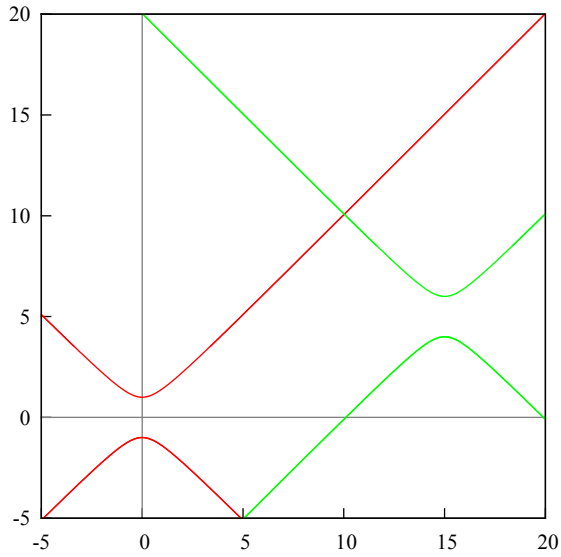
$$x^2 - y^2 = 1 \Longrightarrow x = \frac{1}{\cos(t)},\ y = \tan(t)$$

$$(x-5)^2 - (y-10)^2 = 1 \Longrightarrow x = \frac{1}{\cos(t)} + 5,\ y = \tan(t) + 10$$

$$y^2 - x^2 = 1 \Longrightarrow x = \tan(t),\ y = \frac{1}{\cos(t)}$$

$$(y-5)^2 - (x-15)^2 = 1 \Longrightarrow x = \tan(t) + 15,\ y = \frac{1}{\cos(t)} + 5$$



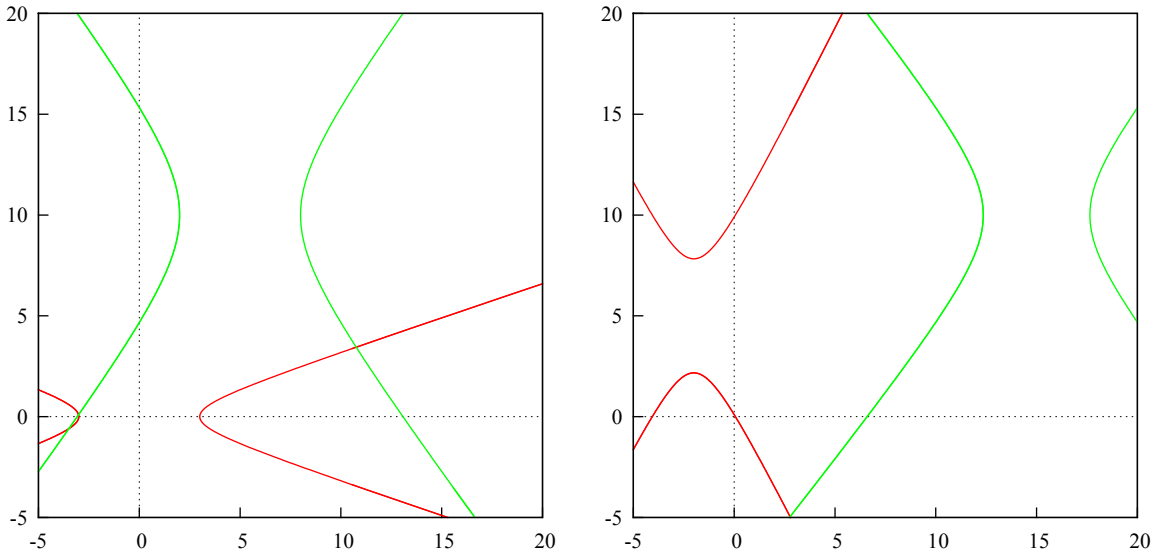


$$\frac{x^2}{9} - y^2 = 1 \Longrightarrow x = \frac{3}{\cos(t)},\ y = \tan(t)$$

$$\frac{(x-5)^2}{9} - \frac{(y-10)^2}{16} = 1 \Longrightarrow x = \frac{3}{\cos(t)} + 5,\ y = 4\tan(t) + 10$$

$$\frac{(y-5)^2}{8} - \frac{(x+2)^2}{2} = 1 \Longrightarrow x = \sqrt{2}\tan(t) - 2,\ y = \frac{\sqrt{8}}{\cos(t)} + 5$$

$$\frac{(x-15)^2}{7} - \frac{(y-10)^2}{11} = 1 \Longrightarrow x = \frac{\sqrt{7}}{\cos(t)} + 15,\ y = \sqrt{11}\tan(t) + 10$$



Параметризация на хипербола с косинус хиперболичен $\cosh(t)$ и синус хиперболичен $\sinh(t)$. Основна формула:

$$\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$$

Тогава параметризацията на $x^2 - y^2 = 1$ е:

$$x = \cosh(t),\ y = \sinh(t)$$

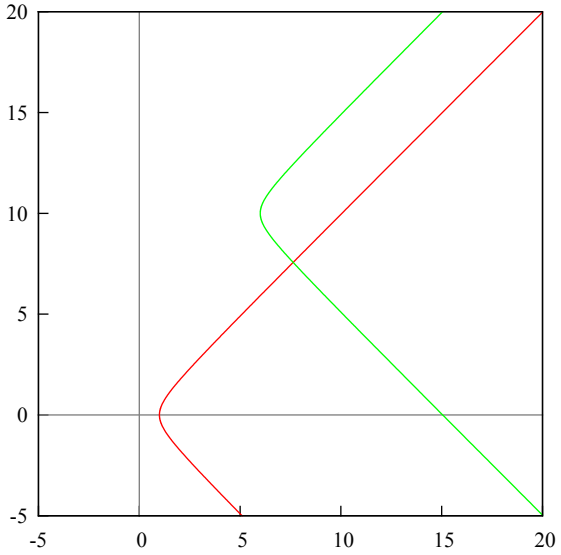
Примери:

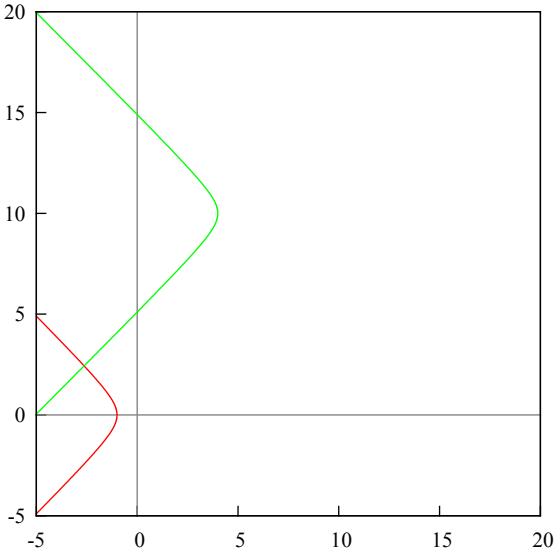
$$x^2 - y^2 = 1 \Longrightarrow x = \cosh(t),\ y = \sinh(t)$$

$$(x-5)^2 - (y-10)^2 = 1 \Longrightarrow x = \cosh(t) + 5,\ y = \sinh(t) + 10$$

Липсва част от хиперболата, тя се дава с отрицателен знак пред синус и косинус хиперболичен:

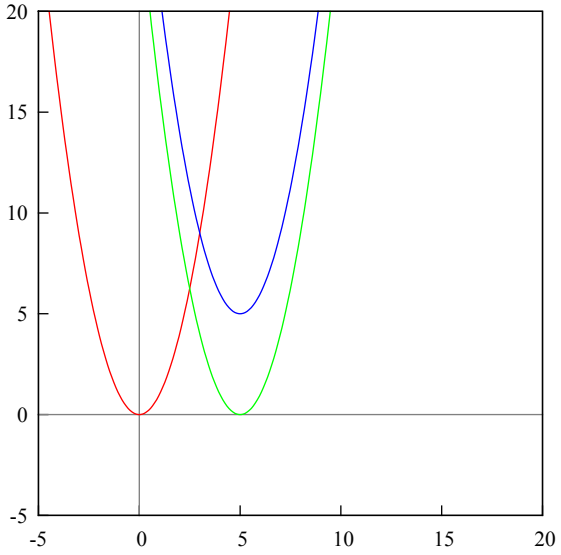
$$x = -\cosh(t),\ y = -\sinh(t) \qquad x = -\cosh(t) + 5,\ y = -\sinh(t) + 10$$

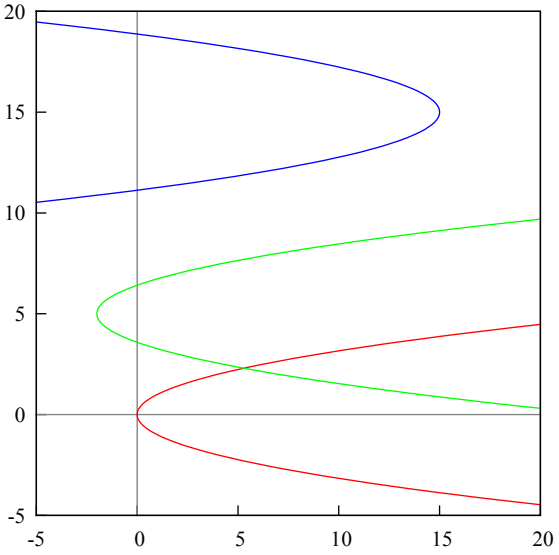




2.3 Парабола

$$y = x^2 \Longrightarrow x = t,\ y = t^2$$
$$y = (x-5)^2 \Longrightarrow x = t+5,\ y = t^2$$
$$y - 5 = (x-5)^2 \Longrightarrow x = t+5,\ y = t^2 + 5$$
$$y^2 = x \Longrightarrow x = t^2,\ y = t$$
$$(y-5)^2 = x + 2 \Longrightarrow x = t^2 - 2,\ y = t + 5$$
$$-(y-15)^2 = x - 15 \Longrightarrow x = -t^2 + 15,\ y = t + 15$$



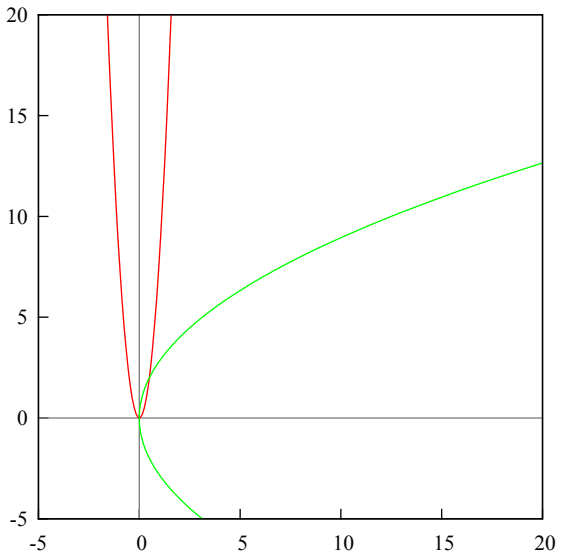


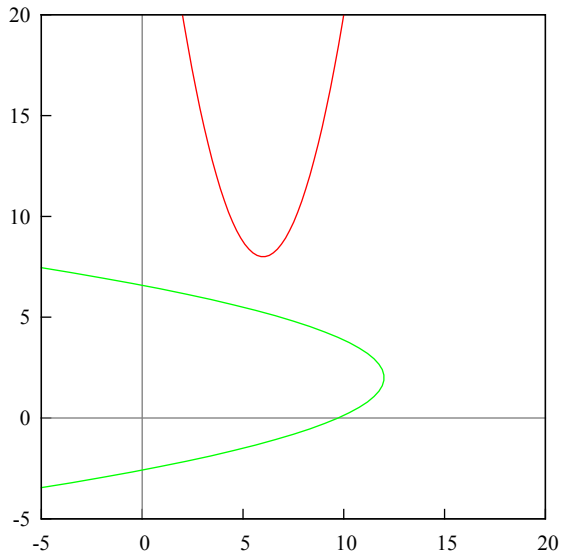
$$y = 8x^2 \Longrightarrow x = t,\ y = 8t^2$$

$$y^2 = 8x \Longrightarrow x = t^2,\ y = \sqrt{8}\,t$$

$$4(y-8) = 3(x-6)^2 \Longrightarrow x = 2t + 6,\ y = 3t^2 + 8$$

$$-4(y-2)^2 = 7(x-12) \Longrightarrow x = -4t^2 + 12,\ y = \sqrt{7}\,t + 2$$





3 Повърхнини от втора степен

При параметризация: сферични координати могат да се използват само за елипсоидни и хиперболоидни повърхнини (всички неизвестни трябва да са на втора степен), за всички могат да се използват цилиндрични координати (това са полярни координати в пространството).

3.1 Елипсоидни повърхнини

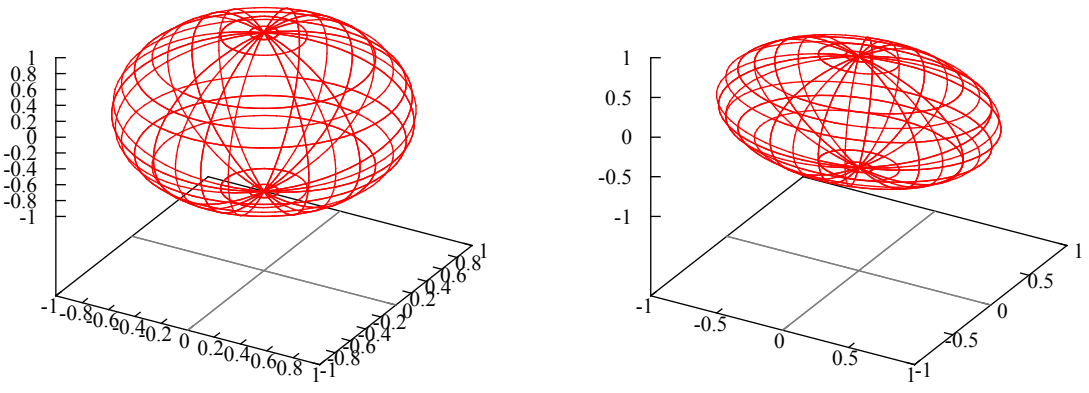
- Елипсоид (триосен): $a \neq b \neq c$.

  Ротационен елипсоид (двуосен): $b = c$.

  Сфера: $a = b = c$.

  {gnuplot: $\theta \to u$, $\varphi \to v$, splot cos(u)*cos(v), sin(u)*cos(v), sin(v)}

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



- Имагинерен елипсоид.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$$

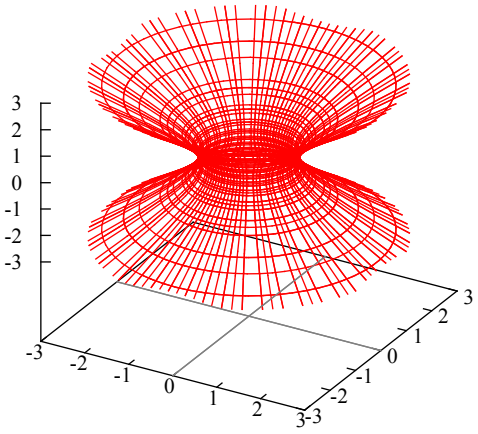
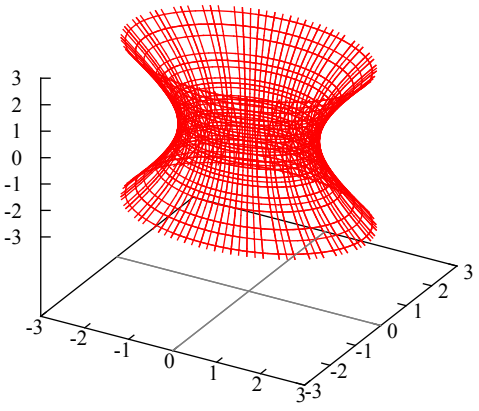
- Координатното начало (точка).

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

3.2 Хиперболоидни повърхнини

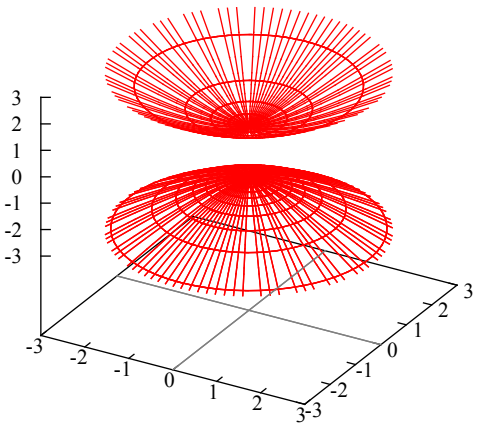
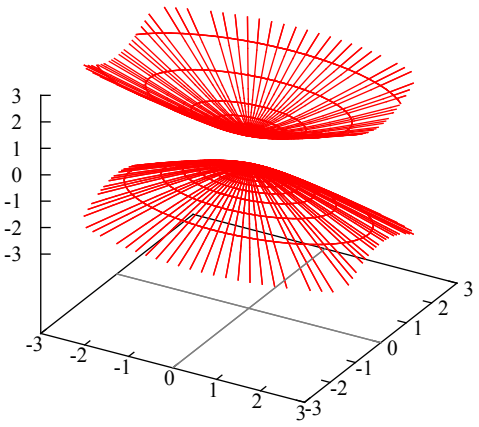
- Хиперболоид (с една повърхнина, прост). Ротационен хиперболоид: $a = b$.
  {gnuplot: $\theta \to u$, $\varphi \to v$, splot cos(u)/cos(v), sin(u)/cos(v), tan(v)}

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

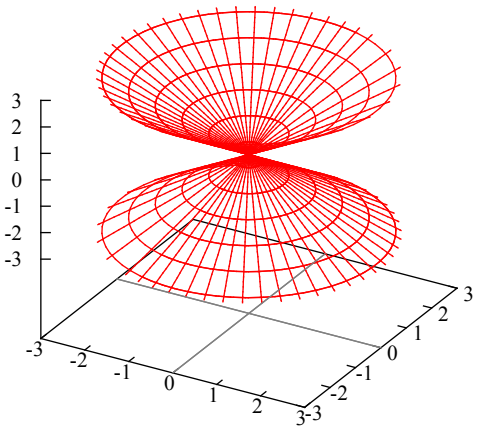
- Хиперболоид (с две повърхнини, двоен).
  {gnuplot: $\theta \to u$, $\varphi \to v$, splot cos(u)*tan(v), sin(u)*tan(v), 1/cos(v)}

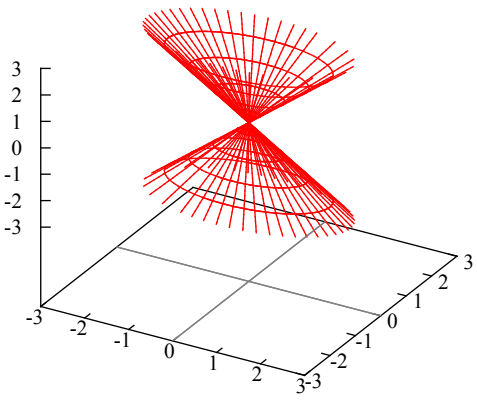
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

- Конус (най-често: $x^2 + y^2 = z^2$).
  {gnuplot: $\theta \to u$, $r \to v$, splot cos(u)*v, sin(u)*v, v}

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

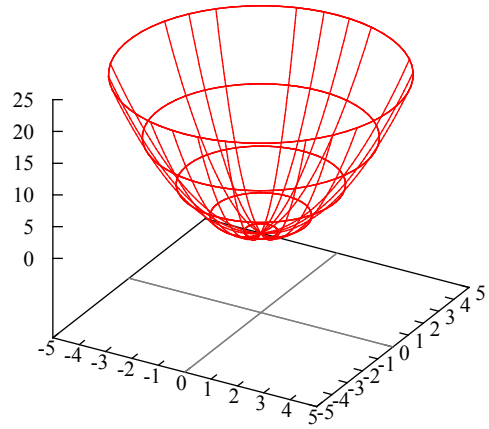


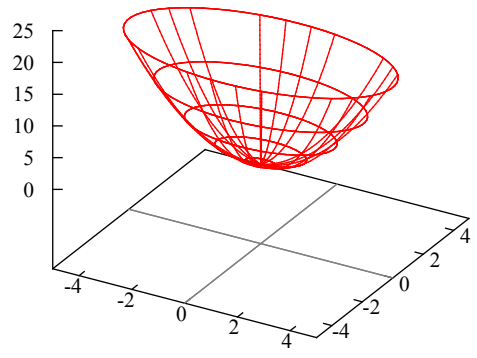


3.3 Параболоидни повърхнини

- Параболоид. Ротационен параболоид: $a = b$.
  {gnuplot: $\theta \to u$, $r \to v$, splot cos(u)*v, sin(u)*v, v**2}

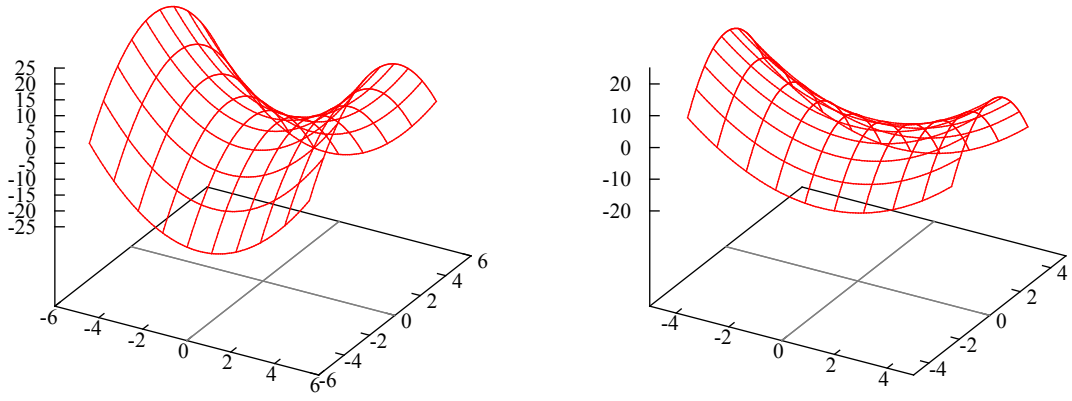
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$$





- Хиперболичен параболоид (седло).
  {gnuplot: $x \to u$, $y \to v$, splot u, v, u**2 — v**2}

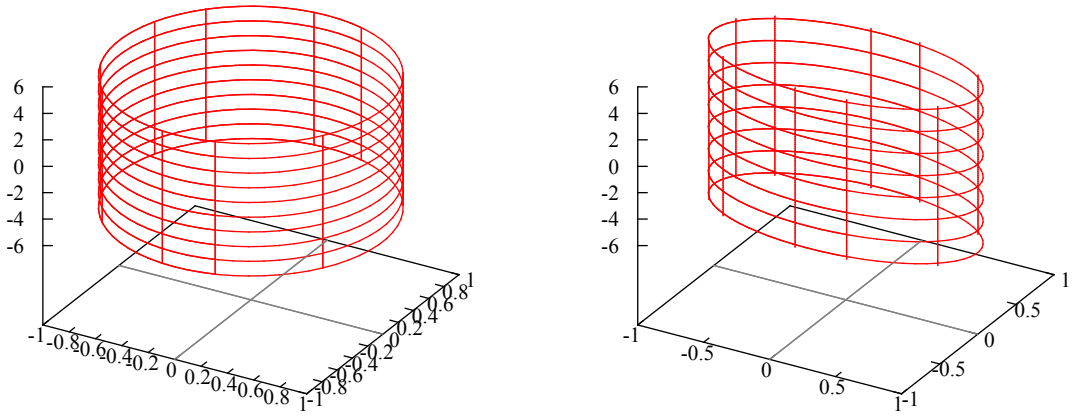
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$$



3.4 Цилиндрични повърхнини

- Елиптичен цилиндър: $a \neq b$. Прав кръгов цилиндър: $a = b$.
  {gnuplot: splot cos(u), sin(u), v}

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



- Имагинерен елиптичен цилиндър.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$$

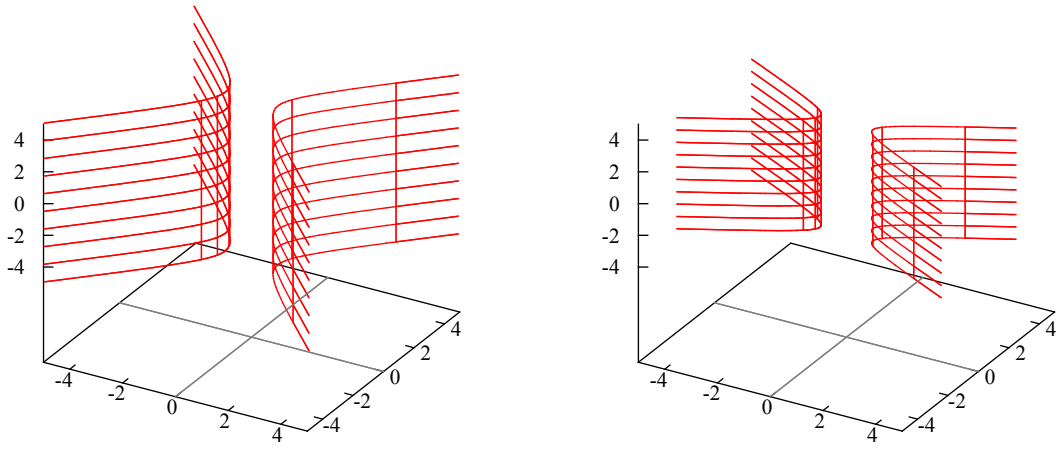
- Оста Oz $(0, 0, z)$ (права).

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

- Хиперболичен цилиндър.

  {gnuplot: splot 1/cos(u), tan(u), v}

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



- Хиперболичен цилиндър в другата посока.

  {gnuplot: splot tan(u), 1/cos(u), v}

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

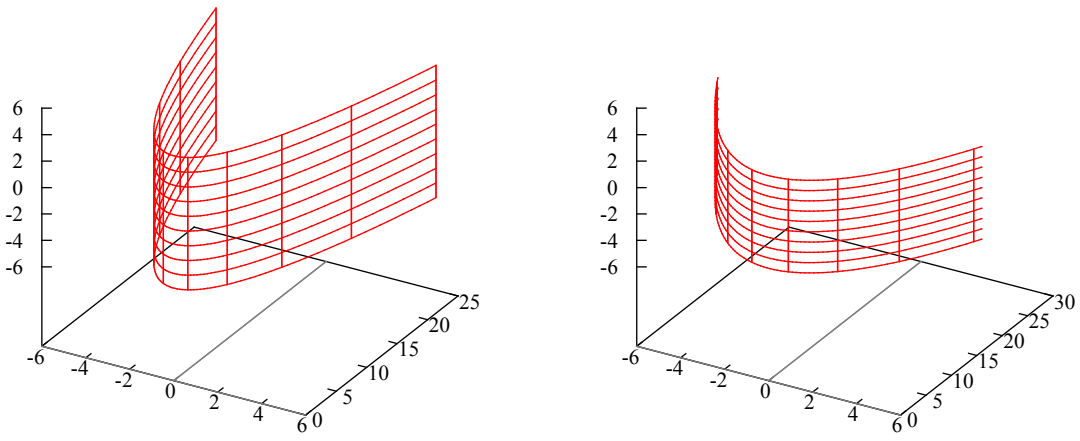
- Две пресичащи се равнини в оста Oz.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

- Параболичен цилиндър.

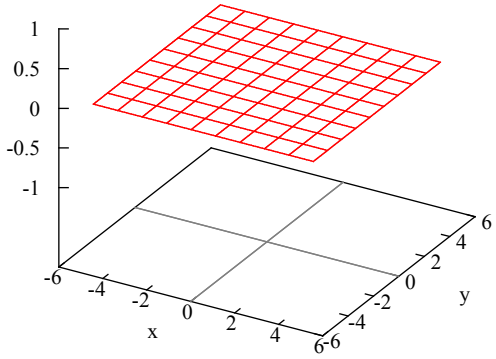
  {gnuplot: splot u, u**2, v}

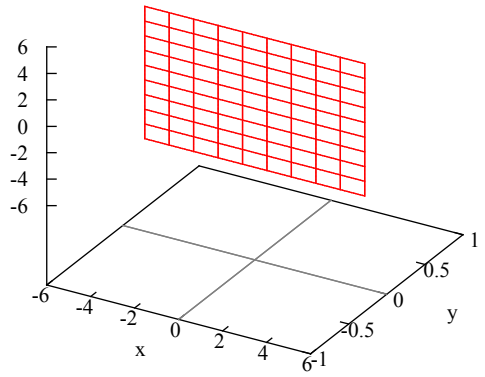
$$x^2 = y$$



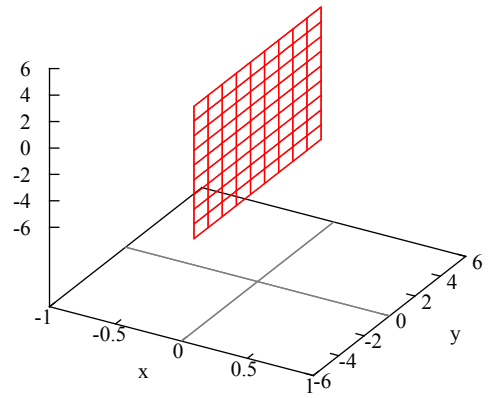
3.5 Равнини

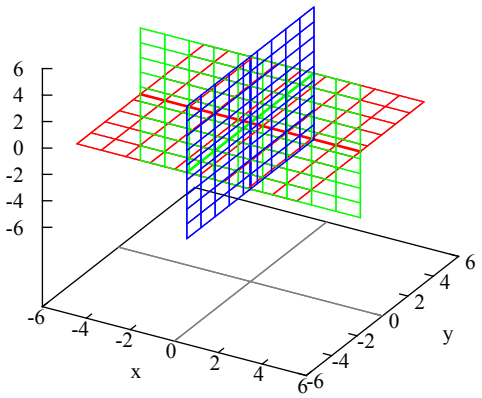
- Равнината Oxy ($z = 0$). {gnuplot: splot u, v, 0}
  Равнината Oxz ($y = 0$). {gnuplot: splot u, 0, v}





- Равнината Oyz ($x = 0$). {gnuplot: splot 0, u, v}





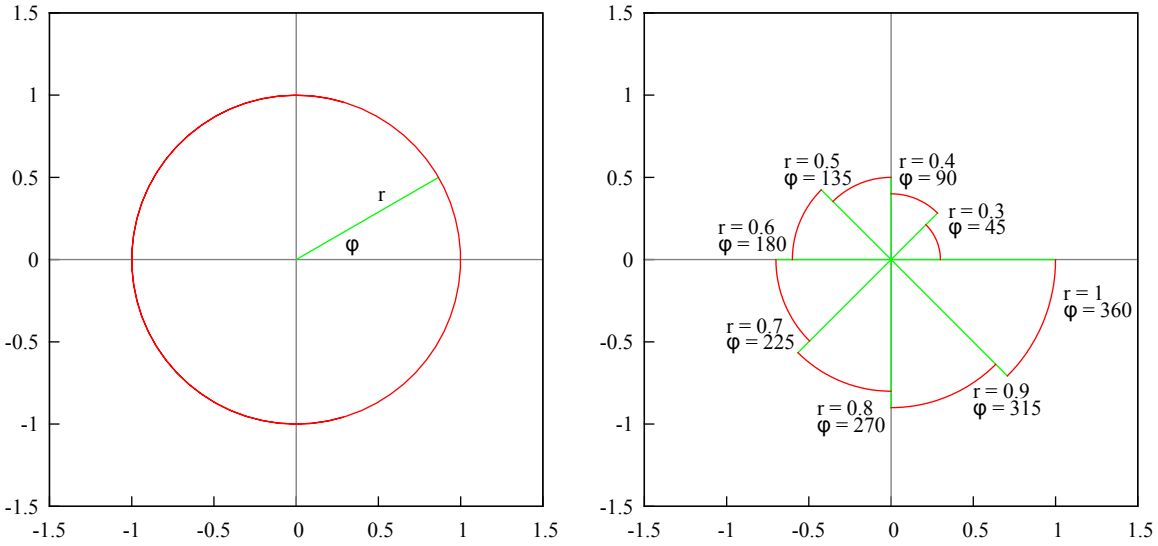
4 Координатни системи

Дефиниции
http://en.wikipedia.org/wiki/ISO_31-11#Coordinate_systems
http://en.wikipedia.org/wiki/Spherical_coordinate_system#Cartesian_coordinates
http://en.wikipedia.org/wiki/Jacobian_matrix_and_determinant

4.1 Полярни координати

Параметризация на окръжност $x^2 + y^2 = r^2$ (якобиан $\Delta = r$):

$$x = r\cos(\varphi),$$
$$y = r\sin(\varphi).$$



Параметризация на елипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = r^2$ (якобиан $\Delta = abr$):

$$x = ar\cos(\varphi),$$
$$y = br\sin(\varphi).$$

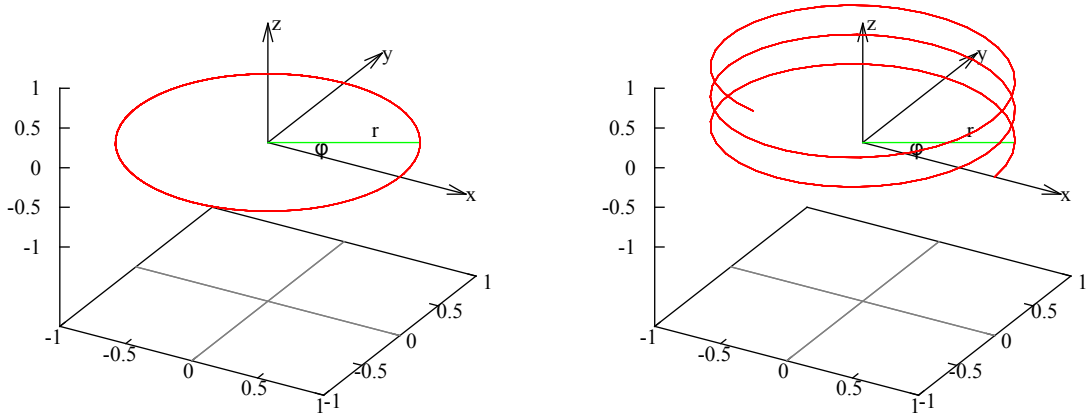
Якобианът (Jacobian) се означава с Δ, и интегралът се умножава с него при смяната на променливите.

4.2 Цилиндрични координати

Цилиндрични координати: това са полярни координати в пространството, като имаме промяна по z. Могат да се прилагат за всички повърхнини от втора степен.

Параметризация с основа окръжност (якобиан $\Delta = r$):

$$x = r\cos(\varphi),$$
$$y = r\sin(\varphi),$$
$$z = z.$$



Параметризация с основа елипса (якобиан $\Delta = abr$):

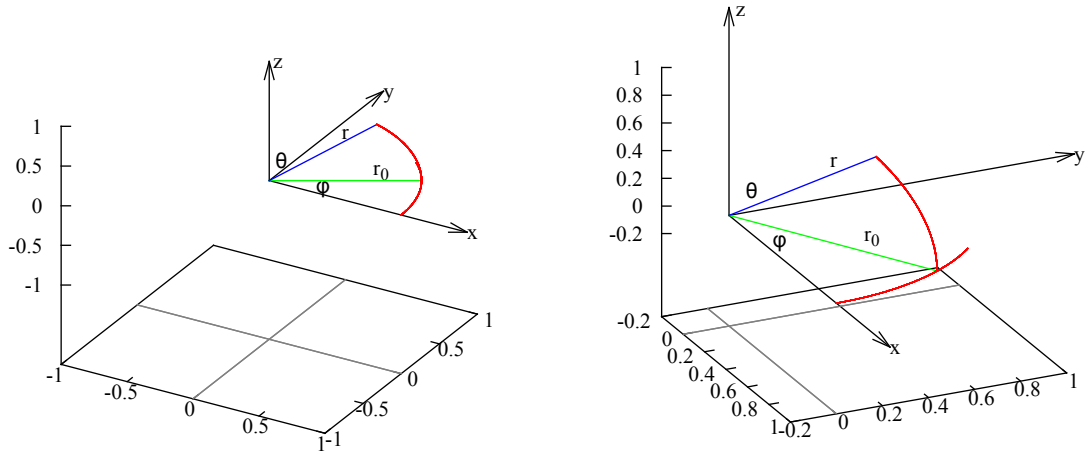
$$x = ar\cos(\varphi),$$
$$y = br\sin(\varphi),$$
$$z = z.$$

4.3 Сферични координати

Сферични координати: ъгълът φ е между x и y (в равнината Oxy), започвайки от оста x; ъгълът θ е между z и равнината Oxy, започвайки от оста z. Могат да се прилагат само ако и трите променливи x, y, z са на втора степен (за повърхнини от втора степен).

Параметризация на сфера $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ (якобиан $\Delta = r^2\sin(\theta)$):

$$x = r\sin(\theta)\cos(\varphi),$$
$$y = r\sin(\theta)\sin(\varphi),$$
$$z = r\cos(\theta).$$

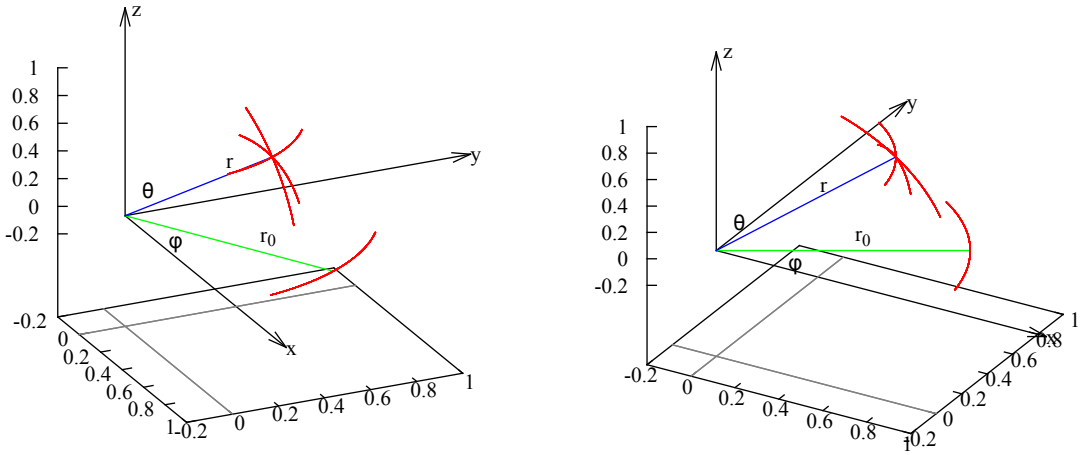


В равнината Oxy (ъгъл φ се изчислява от оста x):

$$x = r_0 \cos(\varphi),$$
$$y = r_0 \sin(\varphi).$$

Спрямо z (ъгъл θ се изчислява от оста z):

$$r_0 = r \sin(\theta),$$
$$z = r \cos(\theta).$$



Параметризация на елипсоид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = r^2$ (якобиан $\Delta = abcr^2 \sin(\theta)$):

$$x = ar \sin(\theta) \cos(\varphi),$$
$$y = br \sin(\theta) \sin(\varphi),$$
$$z = cr \cos(\theta).$$

5 Вектори

Дефиниции: http://en.wikipedia.org/wiki/Euclidean_vector,
Dot_product, Cross_product, Triple_product.

5.1 Скаларно произведение

Скаларно произведение — вектор по вектор дава число:

$$\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = \textit{число}.$$

Основна зависимост:

$$\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos(\varphi) \Longleftrightarrow \cos(\varphi) = \frac{\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|}.$$

Дължина на вектор: корен квадратен от координатите на квадрат:

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2},\ |\overrightarrow{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}.$$

Всичко това важи и ако векторите са само с две координати (в равнината).

Скаларното произведение е инструмент за пресмятане на ъгли.

5.2 Векторно произведение

Векторно произведение — вектор по вектор дава вектор:

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \overrightarrow{i}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \overrightarrow{j}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \overrightarrow{k}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \textit{вектор}.$$

Дължината на този вектор:

$$|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\sin(\varphi).$$

Или чрез корен квадратен от координатите на квадрат.

Векторното произведение е инструмент за пресмятане на лица.

5.3 Смесено произведение

Смесено произведение — векторно произведение по вектор дава вектор, по още един вектор (което е скаларно произведение) дава число:

$$\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c} = (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b})\overrightarrow{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \textit{число}.$$

Ако детерминантата е нула, то трита вектора лежат в една равнина.

Смесеното произведение е инструмент за пресмятане на обеми (по модул).

Литература

- Аналитична геометрия: И. Трендафилов (л,у)
- Линейна алгебра: К. Пеева (л), М. Узунова (у)
- Математически анализ: Е. Върбанова (л), Й. Панева (у)
- Сайтове: LaTeX Wikibooks, gnuplot tips, Wikipedia, Wolfram MathWorld
- Софтуер: TeX Live, gnuplot, Notepad++, Sumatra PDF, Windows XP